Massachusetts Teknoloji Enstitüsü-Fizik Bölümü

Fizik – 8.01 **Ödev # 7** **Güz, 1999**

ÇÖZÜMLER

Dru Renner dru@mit.edu

7 Kasım 1999 Saat: 21.50

Problem 7.1 (Ohanian, sayfa 271, problem 55)

Bu problem boyunca roket denklemini kullanacağız.

$$V_f - V_i = u ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)$$

İki roket düşünün. (1) Başlangıç kütlesi M_0 ve son kademesinin nihai kütlesi M olan kademeli bir roket (2) Başlangıç kütlesi M_0 ve son kütlesi M olan tek kademeli bir roket. Çok kademeli (1) roketinin bütün kademeleri ile tek kademeli (2) roketinin tek kademesinin aynı u dışarı atma hızına sahip olduğunu varsayalım. Tek kademeli roket için limit hızın şu şekilde olduğunu biliyoruz.

$$v_2 = u ln\left(\frac{M_0}{M}\right)$$

Her bir yükü atılmış kademe aynı kütleye sahip olduğu için roket (1), roket (2)'den daha az yakıta sahiptir. Roket (1)'in limit hızının roket (2)'nin limit hızından az olacağını beklememiz gerekir. Bunu görmek için iki kademeli bir roket düşünelim. Birinci kademe için yakıtın kütlesinin M_{F1}, birinci yükü atılmış kademenin kütlesi M_1 ve ikinci kademenin yakıtının kütlesinin iseM_{F2} olduğunu varsayalım. Bu durumda son kütle $M = M_0 - M_{F1} - M_1 - M_{F2}$ olacaktır. M_{F1} kütlesini yaktıktan sonra roketin hızı;

$$v' = u ln\left(\frac{M_0}{M_0 - M_{F1}}\right)$$

İle verilir. Bu durumda ilk kademenin yükü boşaltılmıştır. Böylece kütle $M_0 - M_{F1} - M_1$ ye inmiştir. Eğer birinci kademenin roketin geri kalan kısmına göre sıfır hızla uzaklaştığını varsayarsak, bu durumda roketin geriye kalan kısmı yükü boşaltılmış kademeden dolayı hızlanamayacaktır. Bu durumda M_{F2} ateşlenir ve roketin hızı şöyle olur.

$$v'' = u ln\left(\frac{M_0 - M_{F1} - M_1}{M_0 - M_{F1} - M_1 - M_2}\right) = u ln\left(\frac{M_0 - M_{F1} - M_1}{M}\right)$$

Böylece 1 nolu roket için (#1) limit hız;

$$v_1 = v' + v'' = uln\left(\frac{M_0}{M_0 - M_{F1}}\right) + uln\left(\frac{M_0 - M_{F1} - M_1}{M}\right)$$

$$= uln\left(\frac{M_0}{M_0 - M_{F1}} . \frac{M_0 - M_{F1} - M_1}{M}\right)$$

$$= uln\left(\frac{M_0}{M}\right) - uln\left(\frac{M_0 - M_{F1}}{M_0 - M_{F1} - M_1}\right)$$

$$= v_2 - uln\ \left(\frac{M_0 - M_{F1}}{M_0 - M_{F1} - M_1}\right)$$

Şeklinde olur. $M_1 > 0$ olduğu için yukarıdaki ifadede bulunan ikinci terim negatiftir. Böylece

$$v_1 < v_2$$

olur. Her bir yükü boşaltılmış kademe için, v_1 i daha da azaltacak benzer terimler olacaktır.

Problem 7.2

(a) Uzay aracının başlangıç yönü boyunca olan hızları pozitif olarak düşünelim, uzay aracının son hızı v', gezegenin son hızı ise V' olsun. Momentum korunumu.

$$mv + MV = mv' + MV' \qquad \Rightarrow \qquad V^{'} - V = \tfrac{m}{M}.(v - v^{'})$$

Eşitliğini verir. Mekanik enerji korunur. Gezegenler arasında yeterli uzaklık olduğu zaman eğer sistemin başlangıç ve son anlarının ortya çıkmasını düşünürsek, bu durumda çekim potansiyel enerji ihmal edilir. Bundan dolayı kinetik enerji korunur.

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}mv'^2 + \tfrac{1}{2}MV'^2 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{m}{M}.(v - v').(v + v') = (V' - V).(V' + V)$$

Eşitlik (??) kullanarak, yukarıdaki ifadeyi yeniden yazabiliriz;

$$\tfrac{m}{M}.(v - v').(v + v') = \tfrac{m}{M}.(v - v').(V + V') \Rightarrow$$

$$V' = v + v' - V$$

Bu ifadeyi eşitlik (??) yerine yazarsak,

$$v + v' - 2V = \tfrac{m}{M}.(\ v - v') \qquad \Rightarrow$$

$$v' = \frac{\frac{m}{M} - 1}{1 + \frac{m}{M}} . v + \frac{2}{1 + \frac{m}{M}} . V$$

Elde ederiz.

(b) Uzay aracının kütlesi gezegenin kütlesi ile karşılaştırıldığında oldukça küçüktür. Yani $\frac{m}{M} \ll 1$

Bundan dolayı

$$v' \approx -v + 2V$$

Eğer $v = 10\frac{km}{s} = 10^4\frac{m}{s}$ ve $V = -13\frac{km}{s} = 13 \times \frac{10^8 m}{s}$ ise bu durumda

$$v' \approx -36\frac{km}{s} = -36 \times 10^3\ m/s$$

Olur.

(c) Burada yine uzay aracının ilk ve son anlarının Jüpiterden yeteri kadar uzakta olduğunu ve böylece çekim enerjisinin ihmal edilebileceğini varsayıyoruz. Bu durumda eğer $m = 2000kg$ ise kinetik enerjideki değişim için şu şekilde verilir.

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv^2 \approx 1.2 \times 10^{12} J$$

<u>Problem 7.3</u> (Ohanian, sayfa 320, problem 23)

Sayfa 306 daki örnek 7 ve 8 de ince bir çubuk gösterimi yer almaktadır.

Bayanın omuzlarından vücudunun merkezinden geçen dönme eksenine olan uzaklık $d = 0.20\,m$, her bir kolunun uzunluğu $l = 0.60\,m$ ve her bir kolunun kütlesi M= 2.8 kg olsun. İlk olarak bayanın her kolunun vücudunun her iki tarafında dik olarak aşağıya doğru olduğunu düşünelim. Vücudunun merkezinden geçen bir dikey eksen boyunca eylemsizlik momenti şu şekilde verilir.

$$I_1 = \sum m.d^2 = 2Md^2 = 0.224\,kgm^2$$

Tüm kütleler dönme ekseninden aynı d mesafesi kadar uzakta olduğu için burada yukarıdaki basit ifadeyi kullandık. Şimdiki bayanın kollarını yatay olarak uzattığı bir durumu düşünelim. Vücudunun merkezinden geçen bir dikey eksen boyunca eylemsizlik momenti paralel eksenler teoremine göre;

$$\imath_2 = 2(\frac{1}{12}Ml^2 + M\left(d + \frac{l}{2})^2\right) = 1.568\,kgm^2$$

Şeklinde verilir. Burada her iki kol içermesi için 2 çarpanı hesaba katılmıştır. $\frac{1}{12}Ml^2$ kütle merkezi civarındaki eylemsizlik momentidir (sayfa 309 dahi tablo 12'de verilmiştir), ve $d+\frac{l}{2}$ kütle merkezinden dönme eksenine olan uzaklıktır. Bayanın eylemsizlik momentindeki farkı;

$$\Delta I = I_2 - I_1 = 1.344\ kgm^2$$

Kadardır.

Problem 7.4 (Ohanian, sayfa 320, problem 26)

Uniform yoğunluklu bir küre için, kütle merkezi gerçekten geometrik merkezdir. Böylece bir çap boyunca eylemsizlik momenti aslında kütle merkezinden geçen eksen boyunca olan eylemsizlik momentidir. Bundan dolayı paralel eksen teoremine göre;

$$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$$

Yüzeye teğet olan herhangi bir eksen çaptan geçen eksene belli bir mesafede paraleldir. Bundan dolayı I eylemsizlik momentini bulmak için paralel eksen teoremi kullanabiliriz. Böyle bir eksen için;

$$I = I_{CM} + MR^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$

Şeklindedir.

Problem 7.5 (Ohanian, sayfa 322, problem 41)

$M = 1.5 \times 10^{30} kg$, $R = 20\ km = 20 \times 10^3 m$, $\omega_0 = 2.1\ rev/s = 2.1.2\pi radian/s$, $\alpha_0 = -1.0 \times \frac{10^{-15} rev}{s^2} = -1.0 \times 10^{-15}.2\pi radian/s$. olsun. (Tüm açısal niceliklerin birimini devirden radyana çevrim gerekli olduğunu unutmayın.) Dönme kinetik enerjisi;

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Buradaki eylemsizlik momenti sayfa 309'daki tablo 12.1 'de verilmiştir.

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = 2.4 \times 10^{88}\ kgm^2$$

Böylece K nın zamanla değişim hızı;

$$\frac{dK}{dt} = \frac{I}{2}\frac{d\omega^2}{dt} = I\omega\alpha$$

Şeklindedir. Başlangıçta $\omega = \omega_0$ ve $\alpha = \alpha_0$ dır. Böylece K'daki değişim hızı

$$r_0 = I\omega_0\alpha_0 \approx -1.99 \times 10^{25} J/s$$

Eğer bu oran sabit kalırsa, bu durumda

$$\frac{dK}{dt} = \frac{I}{2}\frac{d\omega^2}{dt} = r_0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{2r_0}{I}.t + \omega_0^2$$

Dönmenin durması için gerekli olan T zamanı

$$0 = \frac{2r_0}{I}.T + \omega_0^2$$

İle verilir ve buda

$$T = -\frac{\omega_0^2 I}{2r_0} = 1.05 \times 10^{15} s \ \approx 3.3 \times 10^7 \text{ yıl}$$

Eder.

<u>Problem 7.6</u> (Ohanian, sayfa 322, problem 45)

Orijini karenin merkezinde olan x-y-z koordinat sistemi seçelim. z ekseni kareye diktir ve x ve y eksenleri ise karenin kenarlarına paraleldir. Dik eksen teoremine göre; I_z değerini hesaplamak istiyoruz. Fakat bunun yerine I_x ve I_y değerlerini hesaplamak daha kolaydır. M karenin kütlesi l ise her bir kenarının uzunluğu oldun. Ayrıca h ise karenin en küçük derinliği olsun. Bu durumda karenin hacmi;

$$V = hl^2$$

Şeklindedir ve her bir çubuğun yoğunluğu ise;

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{hl^2}$$

İle verilir. Ve bu değer sabit olduğundan integralden dışarıya çıkarılabilir. Bu durumda x ekseni boyunca olan eylemsizlik momenti

$$I_x = \int \rho r^2 \, dV$$

$$= \int_0^1 dx \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \rho h dx dy \quad = \rho h.l.\frac{1}{3}\frac{2l^3}{8}$$

$$= \frac{M}{hl^2}.h.\frac{l^4}{12}$$

$$= \frac{1}{12}Ml^2$$

İle verilir. Simetriden dolayı y eksenine göre eylemsizlik momenti de aynıdır.

$$I_y = \frac{1}{12}Ml^2$$

Dik eksenler teoremini kullanarak; aşağıdaki ifadesi elde edilir

$$I_x = I_x + I_y = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{12}Ml^2 = \frac{1}{6}Ml^2$$

Problem 7.7 (Ohanian, sayfa 324, problem 59)

İlk önce mermi uçuşu için hareket denklemlerine ihtiyacımız var. $45°$ açı için; $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ve $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$ olduğunu biliyoruz. Hareket denklemleri

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 t$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}v_0 t$$

Şeklinde verilir. Burada orijin fırlatma noktası ile aynı olacak şekilde seçilmiştir.

$$\vec{r} = 0$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0\hat{x} + \frac{1}{\sqrt{2}}v_0\hat{y}$$

Açısal momentum ise;

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \qquad \Rightarrow \qquad \lfloor L \rfloor = 0$$

Şeklinde verilir. Çünkü $\vec{r} = 0$ dır.

Maksimum yüksekliğe ulaştığı andaki y değeri mekanik enerji korunumundan elde edilebilir.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{\sqrt{2}}v_0\right)^2 + mgy = y = \frac{1}{4}\frac{v_0^2}{g}$$

x değeri bağımsızdır ve bu anda yatay hız değeri

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0\hat{x}$$

İle verilir. Açısal momentumun büyüklüğü hız ile $\vec{v}$ yönüne dik olan konum vektörü bileşeninin çarpımı ile verilir. Böylece;

$$\lfloor L \rfloor = m|y|.|\vec{v}| = \frac{1}{4}\frac{v_0^2}{g}.\frac{m}{\sqrt{2}}v_0 = \frac{m}{4\sqrt{2}}\frac{v_0^3}{g}$$

Bunun yönü hareket düzlemine diktir.

Yere vardığı anda x değeri hareketin menzili ve y değeri de sıfır olur.

$$\vec{r} = \frac{v_0^2}{g}$$

Parabolik hareketin simetrisinden dolayı, hız

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 \hat{x} - \frac{1}{\sqrt{2}} v_0 \hat{y}$$

şeklinde ifade edilir. Açısal momentumun büyüklüğü uzaklık ile $\vec{r}$'ye dik olan hızın bileşenin çarpımı ile verilir.

$$|L| = m|\vec{r}|.\left|v_y\right| = \frac{v_0^2}{g}.\frac{m}{\sqrt{2}} v_0 = \frac{m}{\sqrt{2}} \frac{v_0^3}{g}$$

Bunun yönü hareket düzlemine diktir.

Her üç an için, açısal momentumun büyüklüğü farklıdır. Bundan dolayı açısal momentum gerçekten korunmaz. (Bu en azından açısal momentumun bir bileşeninin korunmadığını gösterir. Tork yerçekiminden dolayıdır ve hareket düzlemine diktir. Bundan dolayı açısal momentumun diğer yönlerdeki bileşenleri korunur)

Problem 7.8 (Ohanian, sayfa 348, problem 11)

Lütfen sayfa 348'deki şekil 13.34'e bakınız.

m kütlesine etkiyen kuvvetler yerçekimi kuvveti ve ipteki gerilmeden dolayı T dir. Eğer a ivmesinin aşağı yönlü olduğunu kabul edersek, bu durumda

$$ma = mg - T \tag{2}$$

M kütlesine etkiyen kuvvetler yerçekimi kuvveti, destek kuvveti ve ipten dolayı olan T gerilmesidir. Bu üç kuvvet herhangi bir öteleme olmamasını sağlamaktadır. Fakat sadece gerilme diskin eksenine göre bir tork oluşturur. (Diğer iki kuvvetin uzantısı diskin merkezinden geçmektedir. Böylece orada tork oluşmaz) Eğer ip kütlesiz ise, bu durumda ip boyunca m kütlesinden M kütlesine iletilen gerilme sabittir. Eğer α açısal ivmesi saat yönünde ise,

$$I\alpha = RT \tag{3}$$

Şeklindedir. Burada R diskin yarıçapıdır. Eğer disk homojen bir yoğunluğa sahip ise bu durumda I sayfa 309'daki tablo 12.1'de verildiği gibi

$$I = \tfrac{1}{2} M R^2 \tag{4}$$

Şeklindedir. Sonuç olarak eğer ipin diskle ters yönde kaymadığını düşünürsek

$$a = \alpha R \tag{5}$$

(4) ve (5) nolu eşitlikler (3) nolu eşitlikte yerine konulduğunda;

$$\frac{1}{2}MR^2.\frac{\alpha}{R} = RT \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{\alpha M}{2}$$

Bunu eşitlik (1) yerine koyarak

$$ma = mg -.\frac{\alpha M}{2}$$

$$\alpha = \frac{g}{1 + \frac{M}{2m}}$$

Elde edilirç $M \ll m$ için $a \rightarrow g$ olması durumu için kontrol edebiliriz.

Problem 7.9

y eksenini çubuğa paralel olarak ve x eksenini ise çubuga vurma yönü, böylece çubuğa dik eksen olduğu söylenebilir, olarak seçelim. $M = 3kg$, $l = 50cm$ ve $d = 15\ cm$ olsun.

(a) Vurma impulsunun büyüklüğü $I = 4\ kgm/s$ ve $\hat{x}$ yönündedir. Böylece $\vec{I} = I\hat{x}$ olsun bu

$$\vec{I} = \int \vec{F}\,dt = \int \frac{d\vec{P}}{dt}dt = \Delta\vec{P}$$

Şeklinde verilir. Burada $\vec{P}$ sistemin toplam momentumudur. Cisim başlangıçta durgundur . Böylece vurmadan önce toplam momentum sıfırdır. Kütle merkezinin hızıyla ilişkili olan vurma sonrasındaki toplam momentum.

$$M\vec{v}_{CM} = \vec{P}_{sonra} = \Delta\vec{P} = \vec{I}$$

Şeklinde verilir. C noktası çubuğun merkezidir. Çubuğun homojen bir kütle dağılımına sahip olduğu varsayılırsa bu nokta aynı zamanda kütle merkezidir. Bundan dolayı C'nin ötelenme hızı aşağıdaki gibidir.

$$|\overrightarrow{v_{CM}}| = \frac{|\vec{I}|}{M} = \frac{I}{M} = \frac{4}{3}\ m/s$$

(b) Eğer biz vurmanın yeterince kısa bir zamanda olduğunu, çubuğun fark edilir bir şekilde hareket etmediğini varsayarsak, yani $\vec{r}$ sabittir. Bu durumda

$$\int \vec{r} \times \vec{F}\,dt = \vec{r} \times \int \vec{F}\,dt = \vec{r} \times \vec{I}$$

Bu durumda açısal momentumdaki değişim şöyle verilir;

$$\Delta L = \int \frac{dL}{dt} = \int \vec{\tau}\ dt = \int \vec{F}\ dt = \vec{r} \times \vec{I}$$

Cisim başlangıçta durgundur. Böylece vurmadan önce toplam açısal momentum sıfırdır. Vurma sonrası toplam açısal momentum ise;

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{I}$$

Eğer biz koordinat sisteminin başlangıcını C noktası olarak seçersek, bu durumda C noktası için açısal hız

$$I_{CM^{\omega}} = \left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\times\vec{I}\right| = dI$$

İle verilir. Burada $I_{CM^{\omega}} = \frac{1}{12}Ml^2$ çubuğun merkezi boyunca geçen eylemsizlik momentidir ve çubuğun boyunca diktir. (Lütfen sayfa 309'daki tablo 12.1 e bakınız.) Bundan dolayı

$$\omega = \frac{dI}{I_{CM}} = \frac{12.dI}{Ml^2} = 9.6 \text{ radyan/s}$$

(c) Vurma sonrası hiçbir dış kuvvet yoktur. Bundan dolayı lineer ve açısal momentum korunur. Kütle merkezi yukarıdaki hız ile hareketini sürdürür. Böylece $8s$'de alınan mesafe aşağıdaki kadardır.

$$D = v_{CM}.8 = \frac{4}{3}.8 \approx 11m$$

Ayrıca çubukta yukarıdaki hız ile dönmesini sürdürür. Böylece toplam açısal dönme aşağıdaki gibidir.

$$\theta = \omega.8 = 76.8\, radyan$$

Bunun 2π'den daha büyük olduğu açıktır. Böylece çubuğun vurmadan önce ile sonrası yönü arasındaki açı şöyle verilir.

$$\theta = 76.8 - 12.2\pi = 1.4\, radyan$$

Burada $0 < 1.4 < 2\pi$ doğru açıdır.

(d) Dönen sistemin toplam kinetik enerjisi;

$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM^2} \approx 5.5\, J$$

Şeklinde verilir.

Problem 7.10

Lütfen ödevdeki çizime bakınız.

Sağa doğru olan yönü pozitif yön olarak kabul edelim ve saat yönündeki dönmeleri de pozitif olarak kabul edeli. Yatay hareket için kuvvet denklemi;

$$Tcos\alpha - F = ma \qquad \Rightarrow \qquad F = Tcos\alpha - ma \tag{6}$$

Şeklindedir. Burada T çekmeden dolayı oluşan gerilme, F sürtünme ve a ise pozitif yatay yöndeki ivmedir. Yo-yonun merkezine göre tork denklemi,

$$FR^2 - TR_1 = I\alpha \qquad (7)$$

Burada α açısal ivmedir. Eğer çekme kuvveti tam yeterli ise, bu durumda sürtünme kuvveti kayma olmaksızın yuvarlanma oluşturabilecektir. Yani a ile α arasındaki ilişki

$$a = R_2\alpha$$

Şeklindedir. α'yı (7) denkleminden yok etmek için bu ilişkiyi kullanabiliriz

$$FR_2 - TR_1 = \frac{I}{R_2}a \qquad (8)$$

Şimdi yukarıdaki eşitlikte F' yi yok etmek için denklem (6) daki değeri yukarıdaki eşitlikte yazılırsa, ivme

$$(Tcos\alpha - ma)R_2 - TR_1 = \frac{I}{R_2}a$$

$$a = \frac{R_2(cos\alpha - \frac{R_1}{R_2}}{\frac{I}{R_2} + R_2M}.T$$

Şeklinde elde edilir. Böylece eğer $cos\alpha > \frac{R_1}{R_2}$ ise bu durumda $a > 0$ dır, ve yo-yo çekme yönünde yuvarlanacaktır. Eğer $cos\alpha < \frac{R_1}{R_2}$ ise bu durumda $a < 0$ dır ve yo-yo çekme yönünün tersine yuvarlanacaktır. Yeterince hassas bir çekme için yo-yo $cos\alpha^* = \frac{R_1}{R_2}$ kritik açısında yuvarlanmayacaktır. (Yeterince hızlı çekilince yo-yo ya kayacaktır yada yerden yukarı kalkacaktır.)

Problem 7.11

Dikkatli olmamız gereklidir. Çünkü

(1) Açısal momentum korunmamıştır ve

(2) Dönme kinetik enerji korunmamıştır.

(a) Sürtünme kuvveti kinetik enerjinin bir kısmını yok edecektir.

(b) Harici bir dış torka ihtiyaç vardır. Bunu tekerleklerle beraber ittiğiniz zaman ellerinizde hissedeceksiniz

(c) Uygulanan tork açısal momentumu değiştirecektir.

(d) İki diskten biri diğerine karşı kaymadığı sürece, dairesel hızları aynı olmalıdır. Böylece;

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 \quad \text{ve} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

F_2 ve F_1 sırasıyla disk 1 ve disk 2 ye etki eden sürtünme kuvvetleridir. $|F_1| = |F_2| = F$. Homojen bir disk için eylemsizlik momenti $\frac{1}{2}MR^2$ dir. Tork açısal ivme ile eylemsizlik momentinin çarpımına eşit olduğu için,

$$FR_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2\alpha_1 \qquad\qquad -FR_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2\alpha_2$$

α_1 ve α_2 disklerin açısal ivmeleridir. Disk $\neq 1$ aşağı doğru dönerken disk $\neq 2$ yukarı doğru dönmektedir. F vektörleri ve R yarıçapları birbirlerine diktir. Bundan dolayı

$$\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right| = \frac{M_2R_2}{M_1R_1}$$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ olduğu için

$$d\omega_1 = -\frac{M_2R_2}{M_1R_1}d\omega_2$$

$$\omega_1 - \omega = -\frac{M_2R_2}{M_1R_1}\omega_2$$

Kısım d' deki ilişki kullanarak, iki bilinmeyenli iki denklemimiz söz konusu olur. Bunları çözerek;

$$|\omega_1| = \frac{\omega}{1+\frac{M_2}{M_1}} \qquad\qquad |\omega_2| = \frac{\omega\frac{R_1}{R_2}}{1+\frac{M_2}{M_1}}$$

Elde ederiz. Diskler yarıçapları hariç bütün yönleri ile benzer olduğu için

$$\frac{M_2}{M_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$$

Şeklindedir ve böylece;

$$|\omega_1| = \frac{\omega}{1+\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2} \qquad\qquad |\omega_2| = \frac{\omega\frac{R_1}{R_2}}{1+\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2}$$

$R_2 = R_1$ için tahmin edileceği gibi $\omega_2 = \omega_1$ dir (Neden?). her ikisi de $\frac{\omega}{2}$ frekansına sahiptir (Çok açık değil).